Lycée de Darou
Mousty classe TS1 Mr Gueye

Nombres complexes

Exercice 1 :

z_1 et z_2 sont deux nombre complexes tel que :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$$

1-Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2.

2-En déduire la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$; $\frac{{z_2}^6}{{z_1}^3}$

Exercice2 :

Soit $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1-i$

1-Determiner le module et un argument de z et z'.

2-Ecrire $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

3-En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice3

1-Soit z un nombre complexe de module 1 et d argument θ:montrer que $z+\frac{1}{z} = 2\cos\theta$.Démontrer que $\forall n \in IN^* \; z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$.

2-Soit la suite $(z_n)_{n\in IN}$ définie par : $z_0 = 1+i$ et $\forall n \in IN; z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n$.

a-Montrer que la suite réelle $(|z_n|)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.Preciser sa raison et son premier terme.

b-Exprimer $\arg z_n$ en fonction de n, puis z_n en fonction de z_0 et n.

c-Peut –on trouver n pour que z_n soit réel ? Imaginaire pur ?

3-Soit $n \in IN^*$ et $A = 1+\cos x+\cos 2x+....\cos(n-1)x = \sum_{k=0}^{n-1}\cos kx$

$$B = \sin x+\sin 2x+...\sin(n-1)x = \sum_{k=1}^{n-1}\sin kx$$

Calculer $A+iB$ et en déduire A et B.

Exercice 4

Soit $z = -8\sqrt{3}+8i$ et $Z = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

1- a-Donner la forme trigonométrique de z.
 b-Determiner les racines carrées de z.

2-Calculer Z^2

3-Preciser les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice5 :

Soit le complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

1-On pose $\alpha = z_0 + z_0^{\ 4}$ et $\beta = z_0^{\ 2} + z_0^{\ 3}$

a-Demontrer que $z_0^{\ 4} + z_0^{\ 3} + z_0^{\ 2} + z_0 + 1 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l équation $Z^2 + Z - 1 = 0\ (E)$

b-Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$

c-Resoudre dans £ l équation (E) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice6

Pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, soit $S_n = \sin\frac{\Pi}{n} + \sin\frac{2\Pi}{n} + \ldots\ldots.. + \sin\frac{(n-1)\Pi}{n}$

a) Posons $z = \cos\frac{\Pi}{n} + i\sin\frac{\Pi}{n}$. Donner une expression simple de la somme $1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^{n-1}$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme

En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

b) Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right) n \in \mathrm{N}^*$?

EXERCICE7

Soit $n>0$; ө є $]0;\pi[$; on considère les expressions

S_n = cos²ө + cos² ө cos2ө +……..+cos^p ө cos pө +…….+cosⁿ ө cos nө

S_n' = cosө sinө + cos² ө sin2ө+……+ cos^p ө sin pө +……..+ cosⁿ ө sin nө

On pose $T_n = S_n + i\, S_n'$

Montrer que T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe dont on donnera le premier terme et la raison .

En déduire une expression simple de T_n, puis de S_n en fonction n et ө (on montera que

$S_n = \cos_\theta^{n+1}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)$

EXERCICE8

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation

(E): $z^4 - (2-i)z^3 - 3i\,z^2 + (4-i)z + 1 + 3i = 0$

1°) préliminaire : quel est le terme constant du polynôme P de la variable complexe $P(z) = (z - z)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$ ou z_1, z_2, z_3, z_4 sont des nombres complexes données ?

2°) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle notée z_1 et une solution imaginaire pour notée z_2

b) Vérifier $z_3 = 2 + i$ est une solution de l'équation (E)

c) Déterminer alors la solution restante z_4 de (E)

d) Montrer que $z = \dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \times \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ est un nombre réel

3°) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points du plan d'affixes respectives Z_1, Z_2, Z_3, Z_4

a) Montrer que ces 4 points sont cocycliques

b) Déterminer la mesure de l'angle oriente $(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3})$

c) En déduire l'affixe z_0 du centre du cercle passant par les points M_1, M_2, M_3, M_4

Exercice :

Z désigne le nombre complexe : $\cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

1. Vérifie que $z^5 - 1 = 0$. En déduire la relation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

2. a. Exprimer z, z^2, z^3, z^4 sous forme trigonométrique.

   b. Démontrer les égalités : $z + z^4 = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $z^2 + z^3 = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

3. Utiliser les résultats des 1° et 2° pour trouver une relation entre $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ puis montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice :

1. Ecrire sous leur forme trigonométrique, les solutions de l'équation : $z^5 = 1$.
2. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Exprimer, en fonction de θ, la solution de l'équation d'inconnue z : $\dfrac{1 - iz}{1 + iz} = e^{i\theta}$.
3. Résolvez dans £ l'équation : $\left(\dfrac{1 - iz}{1 + iz}\right)^5 = 1$.
4. Développez et ordonnez l'expression : $(1 - iz)^5 - (1 + iz)^5$ puis résolvez dans ° : $(1 - iz)^5 - (1 + iz)^5 = 0$.
5. Déduisez des questions précédentes la valeur de $\tan\dfrac{\pi}{5}$.

Exercice :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ et écrire les solutions sous forme trigonométrique.
2. Vérifier que $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une solution de (E). En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice :

On considère le polynôme P défini par : $P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63.$

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis montrer qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on ait $P(Z)(Z^2+3)Q(Z)$.
2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$: $P(Z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = \sqrt{3}i$, $Z_B = -\sqrt{3}i$, $Z_C = 3+2i\sqrt{3}$, $Z_D = \overline{Z_C}$, puis montrer que ces quatre points sont sur un même cercle.

Exercice :

1) Exprimer $1-\cos 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et exprimer $\sin 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.
2) $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $2(1-\cos 2\theta)z^2 - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$.
3) Calculer le module et un argument de chacune des solutions z_1 et z_2 dans le cas où l'équation admet deux solutions distinctes.

Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ et $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé.

4) a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est isocèle.
   b) Trouver θ pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle.