DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

Suivi des élèves

Terminale C

Proposé par Gildas Mba obiang

15 NOVEMBRE 2018

EXERCICE 1 : SUITES NUMÉRIQUES (6 points)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   a) Calculer S_1 et S_2

   b) Montrer que S_n est une suite croissante.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq \sqrt{n}$. En déduire que S_n n'est pas majorée.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2\sqrt{n} - S_n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   Calculer u_2 et v_2 .

3. a) vérifiée que $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = 2n + 1 - \sqrt{n(n+1)}$.

   b) Montrer que la suite u_n est croissante et la suite v_n est décroissante.

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ .

EXERCICE 2 : FONCTION DÉFINIE PAR INTERVALLE. (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \text{ si } x > 1 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}}\right) \text{ si } x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$ on a $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2} - 1$

   b) En déduire que f est continue à gauche de 1.

2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter le résulat.

3. Montrer que f est une fonction continue sur $]0;1]$.

4. Soit la fonction g définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

   a) Montrer que f est continue à gauche de $\frac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a $g(x) = \frac{2}{\sin x}$.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 2x$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 3 : CALCULS VECTORIELS (7 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 7$ cm , $AC = 5$ cm et $BC = 4$ cm . On désigne par A' , B' et C' les milieux respectifs de [BC] , [AC] et [AB].

1. On considère le vecteur $\vec{u} = 16\overrightarrow{BC} + 25\overrightarrow{CA} + 49\overrightarrow{AB}$.

   a) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

2. Pour tout point M du plan , on pose $f(M) = 16\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA'} + 25\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB'} + 49\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC'}$.

   a) Calculer $f(O)$, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

   b) Montrer que $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA'}$. On admet de la même manière que :

   $BA^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BB'}$ et $CB^2 - CA^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}$.

   c) En déduire que si G désigne le centre de gravité du triangle ABC on a :

   $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = -4$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{GB'} = \dfrac{11}{2}$ et que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC'} = -\dfrac{3}{2}$.

   Calculer alors la valeur de $f(G)$.

   d) Déterminrer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

3. a) Exprimer AA'^2 , BB'^2 et CC'^2 en fonction de GA^2; GB^2 et GC^2.

   b) Montrer que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$

   c) Quel est alors l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 78$.

«La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les ***Blaise Pascal****»*