Cellule de Mathématiques *Mardi 19 Novembre 2019*

DEVOIR SURVEILLE N°1 DE MATHEMATIQUES DU 1^{er} SEMESTRE

Niveau : TS1 Durée : 4 heures

Exercice 1

Soit la fonction $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto tanx$

1. Montrer g est bijective. **0,75 pt**

2. On note $Arctan$ la bijection réciproque de la fonction g ($Arctan$ est la fonction arc-tangente)

a. Démontrer que $Arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$ **0,75 pt**

b. En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$Arctanx + Arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$ **1 pt**

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - cosx$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 et que $x_0 \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[$. **0,75 pt**

2. Démontrer qu'il existe un réel $c \in \left]x_0; \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(c)$. **0,5 pt**

3. Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}$ et en déduire que $\frac{\pi + 4\sqrt{2}}{12} < x_0 < \frac{\pi}{4}$. **0,75 pt**

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$; $(a < b)$, et telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$.

On suppose de plus qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que ; $\forall x \in]a,b[$, on ait $|f'(x)| \leq k$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[a,b]$. **1 pt**

2. On définit une suite (X_n) par la donnée de $X_0 \in [a,b]$ et par la relation de récurrence $X_{n+1} = f(X_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in [a,b]$. **0,75 pt**

b. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X_{n+1} - \alpha| \leq k|X_n - \alpha|$. **0,75 pt**

c. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|X_n - \alpha| \leq k^n|X_0 - \alpha|$. **0,5 pt**

d. La suite (X_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite. **1 pt**

Exercice 4

On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \dots + \frac{3n-2}{5^n} = \sum_{p=1}^{n} \frac{3p-2}{5^p}.$$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_{k+1} - S_k = \frac{3k-2}{5^k} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5^{k+1}}$. **1 pt**

2. En déduire :

a. Le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ **0,5 pt**

b. La relation : $S_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}S_n + \frac{3}{20}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. **1 pt**

3. Déduire des résultats du 2.b que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n) \leq 1$. **0,75 pt**

4. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite. **0,75 pt**

Exercice 5

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose la fonction polynôme f_n définie par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.

1. Etudier le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$ **0,5 pt**

2. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$ pour tout $n \geq 2$. **0,5 pt**

3. a. Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$. En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + (\alpha_n)^{n+1}$. **0,25 pt**

b. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$. **0,5 pt**

4. a. Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente et que $\alpha_n < 0,7 \quad \forall n \geq 2$. **1 pt**

b. Montrer que $\forall x \neq 1$, on a : $f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - 2$. **0,75 pt**

c. En déduire que, $\forall n \geq 2$, on a : $2\alpha_n - 1 = (\alpha_n)^{n+1}$. **0,5 pt**

d. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ converge vers $\frac{1}{2}$. **0,5 pt**

Exercice 6

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC isocèle de sommet A tel $AB = AC = 3a$ et $BC = 2a$ (a est un réel strictement positif).

On appelle G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 2, 3, 3. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [AI].

1. Montrer que G est le milieu de [IJ]. **0,5 pt**

2. M étant un point de $\mathcal{P}$: Calculer la somme $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$ en fonction de MG et a. **0,5 pt**

3. Déterminer l'ensemble E_1 des points M de $\mathcal{P}$, calculer la somme :

$$2MA^2 + 3MA^2 + 3MC^2 = 18a^2$$ **0,5 pt**

4. Déterminer l'ensemble E_2 des points M de $\mathcal{P}$, calculer la somme :

$$2MA^2 + 3MA^2 + 3MC^2 = 22a^2$$ **0,5 pt**

5. Montrer que les droites (BC), (AB), (AC) ont chacune, un unique point commun avec E_2.Que représente G pour le triangle ABC ? **1 pt**